

COURBES ELLIPTIQUES SUR LA VARIÉTÉ SPINORIELLE

Nicolas PERRIN

Introduction

Dans cet article, nous démontrons l'irréductibilité du schéma des morphismes d'une courbe elliptique vers la variété spinorielle.

Soit G le groupe $SO(2n)$ et P le sous-groupe parabolique maximal de G associé — avec les notation de N. Bourbaki [Bo] — à la racine simple α_n . La variété homogène G/P est une composante connexe de la grassmannienne des sous-espaces totalement isotropes maximaux de dimension n dans \mathbb{C}^{2n} muni d'une forme quadratique non dégénérée. Nous noterons X cette variété qui est lisse de dimension $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

Soit $\alpha \in A_1(X)$ une classe de 1-cycles sur X et $\mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ le schéma des morphismes de classe α d'une courbe lisse C vers X . Nous montrons le résultat suivant :

THÉORÈME 0.1. — *Soit C une courbe elliptique lisse et soit $\alpha \in A_1(X)$ une classe de 1-cycles sur X de degré d . Dès que $d \geq n - 1$, le schéma $\mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ est irréductible de la dimension attendue*

$$\int_\alpha c_1(X) = 2(n-1)d.$$

Outre l'intérêt propre de ce résultat, notre étude est motivée par une question d'Atanas Iliev et Dimitri Markushevich. Dans leur article [IM], ils montrent que l'espace des modules $M_{X_{12}}(2, 1, 6)$ des fibrés vectoriels de rang 2 et classe de Chern $(1, 6)$ sur le volume de Fano X_{12} d'indice 1 et de degré 12 s'identifie par la construction de Serre aux courbes elliptiques de degré 6 sur X_{12} . Cependant X_{12} est obtenue comme section linéaire de la variété spinorielle de dimension 10. Cette description de $M_{X_{12}}(2, 1, 6)$, notre résultat pour $(n, d) = (5, 6)$ et un argument de monodromie leur permet de montrer l'irréductibilité de $M_{X_{12}}(2, 1, 6)$.

Pour montrer le théorème 0.1, nous utilisons la résolution de Bott-Samelson $\pi : \tilde{X}_{F_\bullet} \rightarrow X$ qui est un morphisme propre et birationnel défini pour tout drapeau complet F_\bullet , voir paragraphe 1. Le principe est de relever un morphisme $f : C \rightarrow X$ en un morphisme $\tilde{f} : C \rightarrow \tilde{X}$. On étudie alors le schéma $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ pour les classes $\tilde{\alpha}$ telle que $\pi_*\tilde{\alpha} = \alpha$. La variété \tilde{X}_{F_\bullet} peut être vue comme une tour de fibrations en droites projectives (cf. paragraphe 1) ce qui permet de raisonner par récurrence en se ramenant à l'étude d'une telle fibration.

Cependant, à la différence du cas des courbes rationnelles que nous avons traité dans [P1] ou [P2], nous avons besoin d'imposer des conditions de positivité plus fortes — notées (\star) — sur les classes de 1-cycles $\tilde{\alpha} \in A_1(\tilde{X})$ pour obtenir l'irréductibilité du schéma $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$, voir paragraphe 2.1. Nous montrons aux propositions 3.3 et 4.1 que pour (essentiellement) tout morphisme $f \in \mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$, il existe un drapeau complet F_\bullet tel que f se relève dans \tilde{X}_{F_\bullet} en un morphisme \tilde{f} satisfaisant les conditions (\star) . On conclue alors à l'irréductibilité en faisant varier F_\bullet .

REMARQUE 0.2. — (i) A. Bruguères [Br] a montré un résultat d'irréductibilité semblable au théorème 0.1 pour les courbes elliptiques tracées sur les grassmanniennes (voir également [P4]). Le cas des courbes tracées sur des quadriques est traité par E. Ballico dans [Ba].

(ii) La technique présentée ici a l'avantage de pouvoir se généraliser à toutes les variétés homogènes minuscules et permettrait de retrouver les résultats du théorème 0.1, de A. Bruguères et de E. Ballico de manière unifiée. Ceci fait l'objet d'une partie du texte [P5] en préparation.

(iii) Il semble possible qu'en utilisant de manière plus subtile le carquois Q associé à la résolution de Bott-Samelson (cf. paragraphe 3) le résultat reste vrai sans condition sur le degré.

1 Résolution de Bott-Samelson

Dans ce paragraphe, nous reprenons les notations de [P3]. Soit W le groupe de Weyl de G et W_P le sous-groupe de W stabilisant P . On note w_0 l'élément de longueur maximale dans W et \bar{w}_0 sa classe dans W/W_P . Il est bien connu (cf. [St]) que \bar{w}_0 a une unique écriture réduite à relation de commutation près. Nous la noterons \tilde{w}_0 et la fixons sous la forme suivante :

$$\bar{w}_0 = \bar{s}_{\beta_1} \cdots \bar{s}_{\beta_N}$$

où les β_i sont les racines simples définies de la façon suivante. On prend les notations de [Bo] pour les racines simples qui sont notées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On définit pour tout $k \in [1, n]$ l'entier

$$a_k = \frac{(k-1)(2n-k)}{2}$$

et on découpe l'intervalle $[1; N]$ selon les intervalles disjoints $[a_k + 1; a_{k+1}]$ pour $k \in [1; n-1]$ (remarquons que $a_{k+1} = a_k + n - k$). Alors si $i = a_k + j$ avec $j \in [1, n - k]$, on pose

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_{n-j} & \text{si } j \geq 2 \\ \alpha_n & \text{si } j = 1 \text{ et } n - k \text{ est impair} \\ \alpha_{n-1} & \text{si } j = 1 \text{ et } n - k \text{ est pair.} \end{cases}$$

À une telle écriture réduite, nous avons associé dans [P3] un carquois Q . Nous donnons une représentation de Q en appendice ce qui permet de mieux comprendre le choix des notations ci-dessus.

Une fois cette décomposition fixée, à tout drapeau complet F_\bullet , on peut associer (cf. [De]) une variété de Bott-Samelson \tilde{X}_{F_\bullet} . Cette variété peut être décrite par une suite de fibrations

$$\tilde{X}_{F_\bullet} = X_N \xrightarrow{f_N} \cdots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \simeq \text{Spec}(k)$$

où les f_i sont des fibrations en droite projectives. Chacune de ces fibrations f_i est munie d'une section σ_i . Nous noterons ξ_i la classe du diviseur $\sigma_i(X_{i-1})$ de X_i et par T_i le fibré tangent relatif de la fibration f_i . Par abus de notations, nous noterons encore ξ_i et $[T_i]$ les classes des images réciproques de $\sigma_i(X_{i-1})$ et T_i dans \tilde{X}_{F_\bullet} .

2 Fibrations

2.1 Irréductibilité

Nous montrons une proposition qui permet de remonter l'irréductibilité du schéma des morphismes à travers les fibrations en droites projectives. Cependant, contrairement au cas des courbes rationnelles (cf. [P1] prop. 4), la seule condition d'avoir un degré relatif positif ne suffit plus. Soit C une courbe elliptique lisse.

PROPOSITION 2.1. — *Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fibration en droites projectives munie d'une section σ et soit $\tilde{\alpha} \in A_1(X)$ une classe de 1-cycles. Notons T le fibré tangent relatif et ξ le diviseur $\sigma(Y)$. Supposons que $\tilde{\alpha}$ vérifie $\tilde{\alpha} \cdot \xi \geq 0$ et $\tilde{\alpha} \cdot (T - \xi) > 0$.*

Si $\mathbf{Hom}_{\varphi_\tilde{\alpha}}(C, Y)$ est irréductible, alors $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, X)$ l'est également et on a l'égalité*

$$\dim(\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, X)) = \dim(\mathbf{Hom}_{\varphi_*\tilde{\alpha}}(C, Y)) + \tilde{\alpha} \cdot T.$$

PREUVE — Notons E un fibré vectoriel de rang 2 sur Y tel que $X = \mathbb{P}_Y(E)$. La section σ est donnée par une surjection $E \rightarrow L$ où L est inversible. Notons N le fibré inversible noyau de cette surjection.

Nous étudions la fibre du morphisme $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\varphi_*\tilde{\alpha}}(C, Y)$ au dessus d'une flèche $f : C \rightarrow Y$. Un élément de cette fibre est donné par un relèvement de f , c'est-à-dire par une surjection $f^*E \rightarrow M$ où M est inversible sur C avec $2 \deg(M) - \deg(f^*E) = \tilde{\alpha} \cdot T$. Un élément de cette fibre est donc donné par un fibré inversible M de degré $d = \frac{\deg(f^*E) + \tilde{\alpha} \cdot T}{2}$ et par un élément surjectif de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(f^*E, M)$. On a $\tilde{\alpha} \cdot \xi = \deg(M) - \deg(f^*N)$ et $\tilde{\alpha} \cdot (T - \xi) = \deg(M) - \deg(f^*L)$. On distingue deux cas.

Si $\tilde{\alpha} \cdot \xi > 0$ alors $\mathrm{Hom}(f^*E, M)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(f^*N, M) \oplus \mathrm{Hom}(f^*L, M)$ et est de dimension contante (par rapport à f) égale à $\tilde{\alpha} \cdot T$. Le choix de M est libre. La fibre est donnée par le choix de M puis d'une surjection $f^*E \rightarrow M$ c'est-à-dire par un ouvert (donné par la condition de surjectivité) non vide de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(f^*E, M) \times \mathrm{Pic}_d(C)$. On a donc une fibration lisse de dimension $\tilde{\alpha} \cdot T$ au-dessus de $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\tilde{\alpha}}(C, Y)$ d'où le résultat.

Si $\tilde{\alpha} \cdot \xi = 0$ alors si $M \not\simeq f^*N$ on a $\mathrm{Hom}(f^*N, M) = 0$ donc toute flèche $f^*E \rightarrow M$ se factorise par f^*L et on ne peut avoir de flèche surjective car $\deg(M) - \deg(f^*L) = \tilde{\alpha} \cdot (T - \xi) > 0$. Pour tout élément de la fibre, on doit donc avoir un isomorphisme $M \simeq f^*N$. Mais alors comme $\deg(M) - \deg(f^*L) = \tilde{\alpha} \cdot (T - \xi) > 0$, le faisceau f^*E est isomorphe à $M \oplus f^*L$. On a alors un isomorphisme $\mathrm{Hom}(f^*E, M) \simeq \mathrm{Hom}(f^*N, M) \oplus \mathrm{Hom}(f^*L, M)$. La dimension de $\mathrm{Hom}(f^*E, M)$ est donc contante (par rapport à f) égale à $\tilde{\alpha} \cdot T + 1$. La fibre est donnée par un ouvert non vide de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(f^*E, M)$. On a donc encore une fibration lisse de dimension $\tilde{\alpha} \cdot T$ au-dessus de $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\tilde{\alpha}}(C, Y)$. \square

Nous allons appliquer ce résultat à la variété \tilde{X}_{F_\bullet} . Pour cela nous avons besoin de montrer des résultats de positivité sur les classes $\tilde{\alpha}$ de 1-cycles.

REMARQUE 2.2. — *C'est un calcul classique d'exprimer les classes $[T_i]$ en fonction des classes*

ξ_i (cf. par exemple [P2] prop. 2.11). On a

$$T_i = \sum_{k=1}^i \langle \gamma_k^\vee, \gamma_i \rangle \xi_k$$

où les γ_i sont les racines positives définies par $\gamma_i = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_{i-1}}(\beta_i)$.

Nous avons montré dans [P1] que pour une variété miniscule (c'est le cas de X), on a toujours $\langle \gamma_k^\vee, \gamma_i \rangle \in \{0, 1\}$. Nous calculons certaines de ces valeurs.

LEMME 2.3. — (i) Supposons que $i = a_k + j$ pour $k \in [2; n-1]$ et $j \in [1, n-k]$, alors on a $\langle \gamma_{k-1}^\vee, \gamma_i \rangle = 1$.

(ii) Par ailleurs pour tout i et j distincts dans $[1; n-1]$, on a $\langle \gamma_j^\vee, \gamma_i \rangle = 1$.

PREUVE — (i) On commence par remarquer que l'on a l'égalité suivante :

$$\langle \gamma_{k-1}^\vee, \gamma_i \rangle = \langle \beta_k^\vee, s_{\beta_k} \cdots s_{\beta_{i-1}}(\beta_i) \rangle.$$

Par ailleurs, un calcul simple donne

$$s_{\beta_{k-1}} \cdots s_{\beta_{i-1}}(\beta_i) = \sum_{u=n-k-j+1}^{n-k} \alpha_u + 2 \sum_{u=n-k+1}^{n-2} \alpha_u + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

où la seconde somme est vide lorsque $k = 2$. Le résultat en découle.

(ii) Dans ce cas, on a $\gamma_i = \beta_1 + \cdots + \beta_i$ et $\gamma_j = \beta_1 + \cdots + \beta_j$ ce qui donne le résultat. \square

Notons $A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$ l'ensemble des classes $\tilde{\alpha} \in A_1(\tilde{X}_{F_\bullet})$ telles que $\tilde{\alpha} \cdot \xi_i \geq 0$ pour tout $i \in [1; r]$ et $\tilde{\alpha} \cdot \xi_i > 0$ pour tout $i \in [1; n-2]$.

COROLLAIRE 2.4. — (i) Si $\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$, alors on a $(T_i - \xi_i) \cdot \tilde{\alpha} > 0$ pour tout $i \in [1; r]$.

(ii) En particulier, si $\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$, alors le schéma $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ est irréductible.

PREUVE — (i) On a

$$(T_i - \xi_i) \cdot \tilde{\alpha} = \xi_i \cdot \tilde{\alpha} + \sum_{k=1}^{i-1} \langle \gamma_k^\vee, \gamma_i \rangle \xi_k \cdot \tilde{\alpha}.$$

Comme on a $\xi_k \cdot \tilde{\alpha} \geq 0$ et $\langle \gamma_k^\vee, \gamma_i \rangle \geq 0$ pour tout k , on en déduit que pour tout $i \in [1, r]$ et tout $k \in [1, i-1]$, on a $(T_i - \xi_i) \cdot \tilde{\alpha} \geq \xi_i \cdot \tilde{\alpha}$ et $(T_i - \xi_i) \cdot \tilde{\alpha} \geq \langle \gamma_k^\vee, \gamma_i \rangle \xi_k \cdot \tilde{\alpha}$.

Soit $i \in [1, r]$ que l'on écrit sous la forme $i = a_k + j$ avec $k \in [1, n-1]$. Si on a $k \geq 2$, alors $\langle \gamma_{k-1}^\vee, \gamma_i \rangle = 1$ et $(T_i - \xi_i) \cdot \tilde{\alpha} \geq \xi_{k-1} \cdot \tilde{\alpha} > 0$. Sinon, on a $\langle \gamma_1^\vee, \gamma_i \rangle = 1$ et $(T_i - \xi_i) \cdot \tilde{\alpha} \geq \xi_1 \cdot \tilde{\alpha} > 0$.

(ii) On applique la proposition 2.1 à toutes les fibrations f_i et on conclue par récurrence. \square

Nous allons montrer au paragraphe 3 que pour un élément f général de $\mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$, on peut choisir un drapeau F_\bullet tel que f se relève en \tilde{f} dans $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ avec $\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$.

2.2 Dimension

Nous calculons dans ce paragraphe la dimension du schéma $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ pour une classe $\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$. Ce schéma est toujours irréductible comme on l'a vu au corollaire 2.4. La dimension de ce schéma est

$$\sum_{i=1}^r T_i \cdot \tilde{\alpha} = -K_{\tilde{X}_{F_\bullet}} \cdot \tilde{\alpha}.$$

Par ailleurs nous avons montré dans [P3] que le diviseur canonique s'exprime simplement en termes des diviseurs ξ_i par la formule suivante :

$$K_{\tilde{X}_{F_\bullet}} = \sum_{i=1}^r (h(i) + 1) \xi_i$$

où $h(i)$ est la hauteur du sommet i c'est-à-dire la longueur du plus long chemin du sommet i au sommet r (ainsi par exemple $h(r) = 1$, $h(r-1) = 2$, $h(1) = 2n-3$, etc.). Par ailleurs, nous avons montré, toujours dans [P3], que le diviseur ample \mathcal{L} générateur du groupe de Picard de X se relève dans \tilde{X}_{F_\bullet} en :

$$\pi^* \mathcal{L} = \sum_{i=1}^r \xi_i$$

ce qui donne :

$$-K_{\tilde{X}_{F_\bullet}} = (h(1) + 1) \pi^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^r (h(1) - h(i)) \xi_i = 2(n-1) \pi^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^r (h(1) - h(i)) \xi_i.$$

Ainsi pour toute classe $\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$ telle que $\pi_* \tilde{\alpha} = \alpha$ où α est de degré d , on a

$$-K_{\tilde{X}_{F_\bullet}} \cdot \tilde{\alpha} = 2(n-1)d - \sum_{i=1}^r (h(1) - h(i)) \xi_i \cdot \tilde{\alpha} \leq 2(n-1)d - \sum_{i=1}^{n-2} (h(1) - h(i)).$$

Et comme pour tout $i \in [1, n-1]$ on a $h(i) = 2(n-1) - i$ (cf. le carquois donné en appendice), on obtient l'inégalité

$$\dim \mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet}) = -K_{\tilde{X}_{F_\bullet}} \cdot \tilde{\alpha} \leq 2(n-1)d - \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

avec égalité si et seulement si on a $\tilde{\alpha} \cdot \xi_i = 1$ pour tout $i \in [2, n-2]$ et $\tilde{\alpha} \cdot \xi_i = 0$ pour tout $i \in [n, r]$. Nous noterons $\tilde{\alpha}_0$ l'unique classe telle que $\pi_* \tilde{\alpha} = \alpha$ vérifiant cette condition.

3 Choix du drapeau F_\bullet

3.1 Retour sur Bott-Samelson

Rappelons qu'à partir d'une décomposition réduite \tilde{w}_0 de \overline{w}_0 et d'un drapeau complet F_\bullet on peut construire la résolution de Bott-Samelson $\pi : \tilde{X}_{F_\bullet} \rightarrow X$. D'autre part, P. Magyar [Ma] a décrit la résolution de Bott-Samelson comme une variété de configurations ce que nous avons réinterprété dans [P3] grâce au carquois Q .

Dans le cas présent, cette variété de configurations est donnée de la manière suivante. Pour un élément $i \in [1, r]$, la racine simple β_i définit une grassmannienne de sous-espaces totalement isotropes que nous noterons $\mathbb{G}_{iso}(\beta_i, 2n)$. Nous noterons $\dim \beta_i$ la dimension des espaces totalement isotropes éléments de cette grassmannienne. Pour chaque sommet $i \in [1, r]$ du carquois, on choisit un élément x_i dans $\mathbb{G}_{iso}(\beta_i, 2n)$. On a donc une famille :

$$(x_i)_{i \in [1, r]} \in \prod_{i=1}^r \mathbb{G}_{iso}(\beta_i, 2n).$$

Nous imposons maintenant les conditions suivantes sur cette famille. Soit $i \in [1, r]$ et notons δ_1 , δ_2 et δ_3 les racines simples adjacentes à β_i (s'il y a seulement une seule resp. deux racines simples, on garde δ_1 resp. δ_1 et δ_2). Lorsqu'ils existent, notons j_1 , j_2 et j_3 les sommets du carquois munis d'une flèche vers le sommet i et tels que $\beta_{j_k} = \delta_k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. On définit les conditions :

$$(*)_i : \text{ Pour tout } k \in \{1, 2, 3\}, \text{ on a } \begin{cases} x_i \subset x_{j_k} & \text{si } \dim \beta_i < \dim \delta_k \\ x_{j_k} \subset x_i & \text{si } \dim \beta_i > \dim \delta_k. \end{cases}$$

Si le sommet j_k n'existe pas, alors on remplace dans les conditions ci-dessus l'élément x_{j_k} par l'unique élément du drapeau complet F_\bullet appartenant à la grassmanienne $\mathbb{G}_{iso}(\delta_k, 2n)$.

La variété de Bott-Samelson s'interprète alors en terme de variétés de configurations par

$$\tilde{X}_{F_\bullet} = \left\{ (x_i)_{i \in [1, r]} \in \prod_{i=1}^r \mathbb{G}_{iso}(\beta_i, 2n) / (x_i)_{i \in [1, r]} \text{ vérifie les conditions } (*)_i \text{ pour tout } i \in [1, r] \right\}.$$

Le morphisme de $\pi : \tilde{X}_{F_\bullet} \rightarrow X$ est donné par la projection $(x_i)_{i \in [1, r]} \mapsto x_r$. Comme le morphisme π est birationnel, pour un élément x_r général dans X , on peut exprimer tous les éléments de la famille $(x_i)_{i \in [1, r]}$ en fonction de x_r et du drapeaux F_\bullet . Notons V l'unique élément du drapeau complet F_\bullet contenu dans $\mathbb{G}_{iso}(\beta_n, 2n)$, on a $V = F_{n-1}$ si n est pair et $V = W_n$ sinon. On a alors par exemple

$$x_{n-1} = x_r \cap V.$$

L'élément x_{n-1} est une droite vectorielle de V c'est-à-dire un point de $\mathbb{P}(V)$. On déduit de x_{n-1} les points x_i pour $i \in [1, n-2]$ par la formule :

$$x_i = x_{n-1} + F_{i-1}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de dimension i de V c'est-à-dire des éléments de la grassmanienne $\mathbb{G}(i, V)$.

3.2 Une projection de X

Il est clair que l'élément x_{n-1} est bien défini à partir de x_r dès que x_r rencontre V en dimension exactement 1. L'ensemble U des points de X où c'est le cas est un ouvert (une orbite sous le stabilisateur de V) dont le complémentaire est de codimension 3. Sur l'ouvert U , on a donc un morphisme $p : U \rightarrow \mathbb{P}(V)$ défini par $p(x_r) = x_r \cap V$. Ce morphisme est un cas particulier de ceux étudiés dans [P1] ou [P4]. On a ainsi le fait suivant :

FAIT 3.1. — *Le morphisme $p : U \rightarrow \mathbb{P}(V)$ permet de réaliser U comme l'espace total du fibré vectoriel $\Lambda^2(T_{\mathbb{P}(V)}(-1))$.*

Nous considérons par ailleurs la variété image de \tilde{X}_{F_\bullet} par la projection q sur les $n-1$ premiers termes, c'est-à-dire l'image de la projection

$$q : \tilde{X}_{F_\bullet} \rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{G}_{iso}(\beta_i, 2n).$$

Cette image est la variété X_{n-1} définie au paragraphe 1. Nous la noterons $\tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V)$ car c'est la résolution de Bott-Samelson $\pi' : \tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ muni du drapeau complet obtenu comme la trace de F_\bullet sur V . Nous avons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{X}_{F_\bullet} & \xrightarrow{q} & \tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V) \\
 & \nearrow & \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\
 U_0 & \xrightarrow{\quad} & X & & \mathbb{P}(V) \\
 & \searrow & \uparrow i & \nearrow p & \\
 & & U & &
 \end{array}$$

où U_0 est la cellule de Schubert associée au drapeau complet F_\bullet . Au dessus de U_0 l'application π est un isomorphisme.

REMARQUE 3.2. — *La variété $\tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V)$ est munie en tant que variété de Bott-Samelson d'une base des classes de diviseurs qui est donnée par l'image des classes ξ_i pour $i \in [1, n-1]$. Par abus de notations nous noterons encore ξ_i ces classes de diviseurs dans $\tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V)$.*

3.3 Choix du drapeau

Fixons un morphisme $f : C \rightarrow X$. Nous commençons par fixer l'espace V du drapeau, c'est-à-dire l'espace F_{n-1} si n est pair et l'espace F_n dans le cas contraire. Nous choisissons cet espace de sorte que la courbe $f(C)$ soit contenue dans U . Ceci est possible — c'est une application du théorème de Bertini prouvé par S. Kleiman [KL] — grâce à l'action du groupe et le fait que le complémentaire de U est de codimension 3. Un espace V général convient.

Nous montrons maintenant la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. — *Si la courbe $p \circ f(C)$ n'est pas contenue dans un espace linéaire de codimension 2, alors on peut compléter V en un drapeau complet F_\bullet tel que f se relève en $\tilde{f} : C \rightarrow \tilde{X}_{F_\bullet}$ avec $\tilde{f}_*[C] \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$.*

PREUVE — Remarquons tout d'abord que pour qu'un morphisme $f : C \rightarrow X$ se relève dans \tilde{X}_{F_\bullet} , il suffit qu'il rencontre l'ouvert U_0 . En effet, l'image d'un ouvert de C rencontre alors U_0 et l'application \tilde{f} est définie au moins sur cet ouvert. Comme C est une courbe lisse, il se prolonge à C toute entière.

Par ailleurs remarquons également qu'un élément $x \in U$ est dans U_0 si et seulement si son image $p(x)$ n'est contenue dans aucun sous-espace du drapeau complet de V obtenu comme la trace de F_\bullet .

Remarquons enfin que le choix d'un drapeau complet dans V est équivalent au choix d'un drapeaux complet de l'espace \mathbb{C}^{2n} completant V . Nous montrons le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *Soit $g : C \rightarrow \mathbb{P}(V)$ un morphisme vers $\mathbb{P}(V)$ dont l'image réduite n'est contenue dans aucun sous-espace linéaire de codimension 2, alors on peut compléter V en un drapeau complet F_\bullet tel que g se relève en $\tilde{g} : C \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V)$ avec $\tilde{g}_*[C] \cdot \xi_i > 0$ pour tout $i \in [1, n-2]$ et $\tilde{g}_*[C] \cdot \xi_{n-1} \geq 0$.*

PREUVE — Si $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset V$ est le drapeau complet de V induit par F_\bullet , alors la variété $\tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V)$ est décrite par

$$\tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V) = \left\{ (V_{n-i})_{i \in [1, n-1]} \in \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{G}(n-i, V) / F_{i-1} \subset V_i \subset V_{i+1} \text{ pour tout } i \in [1, n-1] \right\}$$

avec $V_n = V$. La projection $\pi' : \tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ est donnée par la projection sur le dernier facteur $(V_i)_{i \in [1, n-1]} \mapsto V_1$. Chaque diviseur ξ_i est donné par l'équation $V_{n-i} = F_{n-i}$.

On construit par récurrence une suite de points $(P_i)_{i \in [1, n-1]}$ de C et les sous-espaces F_i du drapeau complet de telle sorte que pour tout $i \in [1, n-1]$ on ait :

$$\begin{cases} g(P_i) \in F_{i+1} \\ g(P_i) \notin F_i. \end{cases}$$

Si une telle donnée existe, alors le point $g(P_{n-1})$ est dans l'ouvert où π' est bijective donc on peut relever g en \tilde{g} avec par ailleurs

$$\tilde{g}(P_{n-1}) = (g(P_{n-1}) + F_{n-2}, \dots, g(P_{n-1}) + F_1, g(P_{n-1})).$$

En particulier, le point $\tilde{g}(P_{n-1})$ n'est contenu dans aucun des ξ_i et on a donc $\tilde{g}_*[C] \cdot \xi_i \geq 0$ pour tout $i \in [1, n-1]$. Par ailleurs, on voit que le point $\tilde{g}(P_i) = (V_{n-j}(P_j))_{j \in [1, n-1]}$ vérifie $V_{i+1}(P_i) = g(P_i) + F_i = F_{i+1}$. Le point $\tilde{g}(P_i)$ est donc dans le diviseur ξ_{i+1} . On a l'intersection souhaitée.

Il reste donc à construire les points P_i et les sous-espaces F_i . On prend les points P_i en position générale sur C . En particulier, l'espace engendré par $g(P_1), \dots, g(P_i)$ doit être de dimension i pour tout $i \in [1, n-1]$. On construit les F_i par récurrence descendante sur i . Le sous-espace de dimension n du drapeau est V . Une fois F_{i+1} fixé contenant $g(P_1), \dots, g(P_i)$, on choisit F_i contenu dans F_{i+1} et contenant $g(P_1), \dots, g(P_{i-1})$ mais ne contenant pas $g(P_i)$. Ceci est possible par hypothèse sur les P_i et on a une famille de dimension 1 de choix pour F_i . Ainsi la donnée des P_i et des F_i existe et il en existe une famille de dimension $2(n-1)$. Il existe donc une famille de dimension $2n-3$ de drapeaux qui conviennent (une fois le drapeau fixé, il y a un nombre fini de choix sur les points P_i sauf pour x_{n-1}). \square

Le lemme nous permet de fixer un drapeau complet F_\bullet tel que $g = p \circ f$ se relève en $\tilde{g} : C \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_{F_\bullet}(V)$ avec $\tilde{g}_*[C] \cdot \xi_i > 0$ pour tout $i \in [1, n-2]$.

Par ailleurs, comme $p \circ f(P_{n-1})$ n'est contenu dans aucun des sous-espace du drapeau induit par F_\bullet dans V , le point $f(P_{n-1})$ est dans l'ouvert U_0 . La flèche f se relève donc en $\tilde{f} : C \rightarrow \tilde{X}_{F_\bullet}$ et on a $\tilde{g} = q \circ \tilde{f}$. Le fait que f rencontre U_0 , impose que pour tout $i \in [1, r]$, on a $\tilde{f}_*[C] \cdot \xi_i \geq 0$. Les intersections $\tilde{g}_*[C] \cdot \xi_i > 0$ pour tout $i \in [1, n-2]$ imposent que l'on a $\tilde{f}_*[C] \cdot \xi_i > 0$ pour tout $i \in [1, n-2]$. \square

4 Irréductibilité

Nous donnons dans ce paragraphe la preuve de notre résultat principal.

4.1 Courbes générales

Nous commençons par montrer que les morphismes qui ne satisfont pas les conditions de la proposition 3.3 ne peuvent former une composante irréductible du schéma des morphismes pour un degré assez grand. Rappelons que le morphisme $p : U \rightarrow \mathbb{P}(V)$ est le morphisme de projection du fibré vectoriel $\Lambda^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1)$.

PROPOSITION 4.1. — *Soit $\alpha \in A_1(X)$ une classe de degré $d \geq n - 1$. Le fermé du schéma des morphismes $\mathbf{Hom}_{i^*\alpha}(C, U)$ formé des flèches f telles que la courbe $p \circ f(C)$ est contenue dans un sous-espace linéaire de codimension 2 ne peut former une composante irréductible de $\mathbf{Hom}_{i^*\alpha}(C, U)$.*

PREUVE — Nous considérons le morphisme $\mathbf{Hom}_{i^*\alpha}(C, U) \rightarrow \mathbf{Hom}_{p_*i^*\alpha}(C, \mathbb{P}(V))$ induit par p . Pour définir p_* nous considérons les classes de 1-cycles comme des éléments du dual du groupe de Picard et utilisons la transposée de p^* . L'image du fermé considéré dans $\mathbf{Hom}_{p_*i^*\alpha}(C, \mathbb{P}(V))$ est stratifié par les familles $(M_k)_{k \in [2, n-1]}$ des morphismes $f : C \rightarrow \mathbb{P}(V)$ dont l'image est contenue dans un sous-espace linéaire de codimension k . La dimension de M_k est $(n - k)d + k(n - k)$.

La fibre du morphisme $\mathbf{Hom}_{i^*\alpha}(C, U) \rightarrow \mathbf{Hom}_{p_*i^*\alpha}(C, \mathbb{P}(V))$ au dessus de $f : C \rightarrow \mathbb{P}(V)$ est donnée par $H^0(f^* \Lambda^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1))$. Pour un morphisme dont l'image est contenue dans un sous-espace linéaire de codimension k mais pas dans un sous-espace linéaire de codimension plus grande, on a

$$f^* T_{\mathbb{P}(V)}(-1) = \mathcal{O}_C^k \oplus E$$

où E est un fibré de rang $n - 1 - k$, de degré d sur C , engendré par ses sections (car $T_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ l'est) et sans facteur trivial. Ainsi le faisceau $f^* \Lambda^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ est isomorphe à la somme directe suivante :

$$\mathcal{O}_C^{\frac{k(k-1)}{2}} \oplus E^k \oplus \Lambda^2 E.$$

Mais E est engendré par ses sections et on a $H^1 E = 0$ ce qui impose que c'est également le cas de $\Lambda^2 E$ (on a une surjection de $H^0 E \otimes E$ vers $\Lambda^2 E$). Le groupe $H^1(C, f^* \Lambda^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1))$ est donc de dimension $\frac{k(k-1)}{2}$ et le groupe $H^0(C, f^* \Lambda^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1))$ est de dimension

$$(n - 2)d + \frac{k(k-1)}{2}.$$

La famille des morphismes de $\mathbf{Hom}_{i^*\alpha}(C, U)$ qui s'envoie dans M_k est donc de dimension

$$(2n - k - 2)d + k(n - k) + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Enfin la dimension d'une composante irréductible de $\mathbf{Hom}_{i^*\alpha}(C, U)$ est au moins $2(n - 1)d$ et on a

$$2(n - 1)d > (2n - k - 2)d + k(n - k) + \frac{k(k-1)}{2}$$

dès que $d \geq n - 1$ et $k \geq 2$. □

4.2 L'incidence

Soit B un sous-groupe de Borel de G , la variété des drapeaux complets est G/B . Nous avons vu qu'à chaque drapeau complet F_\bullet correspond une résolution de Bott-Samelson $\tilde{X}_{F_\bullet} \rightarrow X$. Considérons l'incidence suivante :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbf{Hom}_\alpha(C, X) \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \\ G/B & & \end{array}$$

où I est formée des couples $(F_\bullet, f) \in G/B \times \mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ tels que $f(C)$ est contenue dans l'ouvert U associé au drapeau F_\bullet , la flèche f se relève en $\tilde{f} : C \rightarrow \tilde{X}_{F_\bullet}$ et on a $\tilde{f}_*[C] \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$ (voir paragraphe 2.1 pour la définition de cet ensemble).

Les propositions 3.3 et 4.1 montrent que la flèche $\text{pr}_2 : I \rightarrow \mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ est dominante dès que $d \geq n - 1$. Rappelons également que nous avons vu dans la preuve de la proposition 3.3 que la dimension de la fibre de pr_2 au-dessus d'un point général est $2(n - 1) + \frac{n(n - 1)}{2}$ (le second terme provenant du choix de V).

4.3 L'irréductibilité

Par définition de I , on a une flèche surjective :

$$\coprod_{\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet}), \pi_*(\tilde{\alpha})=\alpha} G/B \times \mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet}) \rightarrow I$$

et par composition une flèche dominante

$$\coprod_{\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet}), \pi_*(\tilde{\alpha})=\alpha} G/B \times \mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet}) \rightarrow \mathbf{Hom}_\alpha(C, X).$$

On a vu à la section 2.2 que pour tout élément $\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$, la dimension de $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ est inférieure ou égale à

$$2(n - 1)d - \frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$$

avec égalité si et seulement si on a $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0$. Pour une classe $\tilde{\alpha} \in A_1^+(\tilde{X}_{F_\bullet})$ fixée telle que $\pi_*\tilde{\alpha} = \alpha$, l'image de $G/B \times \mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ dans $\mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ est donc de dimension inférieure à

$$2(n - 1)d - \frac{(n - 2)(n - 3)}{2} + \dim(G/B) - \dim(\text{pr}_2^{-1}(f)) \leq 2(n - 1)d.$$

Cependant une composante irréductible de $\mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ est de dimension au moins $2(n - 1)d$, ainsi pour $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\alpha}_0$ l'image de $G/B \times \mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ dans $\mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ ne peut contenir de composante irréductible. On a donc une application dominante

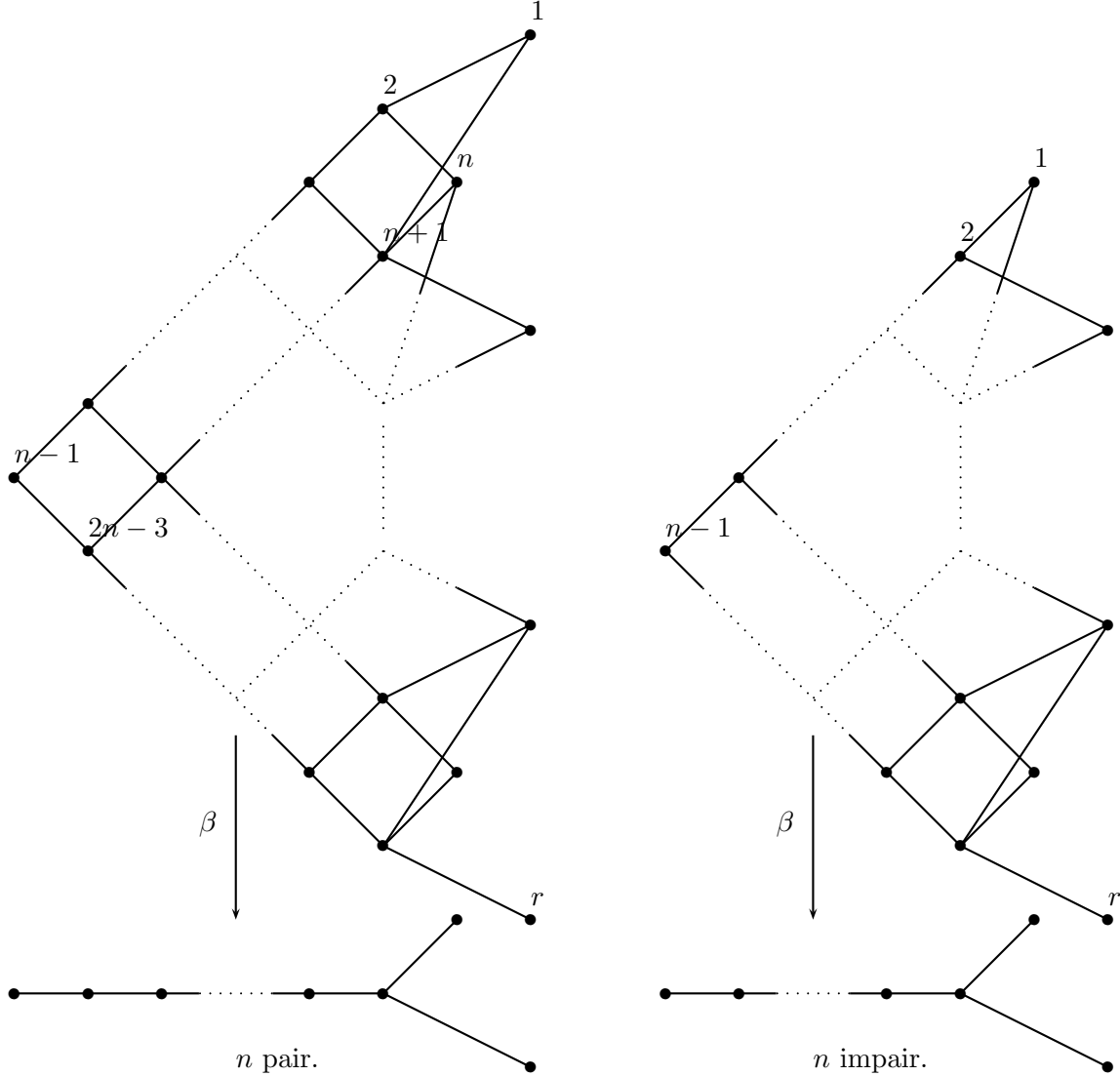
$$G/B \times \mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}_0}(C, \tilde{X}_{F_\bullet}) \rightarrow \mathbf{Hom}_\alpha(C, X).$$

Le schéma $\mathbf{Hom}_{\tilde{\alpha}_0}(C, \tilde{X}_{F_\bullet})$ étant irréductible, on en déduit le résultat principal de cet article :

THÉOREME 4.2. — *Pour $\alpha \in A_1(X)$ tel que $d = \deg(\alpha) \geq n - 1$, le schéma $\mathbf{Hom}_\alpha(C, X)$ est irréductible de dimension $2(n - 1)d$.*

5 Appendice

Nous traçons ici le carquois associé à l'écriture réduite donnée au paragraphe 1. Ce carquois dépend de la parité de n . La flèche β de l'ensemble des sommets vers les racines simples est ici donnée par la projection verticale. Nous n'avons pas tracé les flèches sur les arêtes pour ne pas surcharger le dessin, mais toutes les flèches vont vers le bas.



Références

- [Ba] *Edoardo Ballico* : On the Hilbert scheme of curves in a smooth quadric. Deformations of mathematical structures (Łódź/Lublin, 1985/87), 127–132, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [Bo] *Nicolas Bourbaki* : Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337 Hermann, Paris 1968.

- [Br] *Alain Brugières* : The scheme of morphisms from an elliptic curve to a Grassmannian. *Compositio Math.* 63 (1987), no. 1, 15–40.
- [De] *Michel Demazure* : Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 7 (1974), 53–88.
- [IM] *Atanas Iliev et Dimitri Markushevich* : Parametrization of $\text{Sing}(\Theta)$ for a Fano 3-fold of genus 7 by moduli of vector bundles. Prépublication math.AG/0403122.
- [KL] *Steven Kleiman* : The transversality of a general translate. *Compositio Math.* 28 (1974), 287–297.
- [Ma] *Peter Magyar* : Schubert polynomials and Bott-Samelson varieties. *Comment. Math. Helv.* 73 (1998), no. 4, 603–636.
- [P1] *Nicolas Perrin* : Courbes rationnelles sur les variétés homogènes. *Annales de l’Institut Fourier*, 52, no.1 (2002), pp 105-132.
- [P2] *Nicolas Perrin* : Rational curves on minuscule Schubert varieties. *J. Algebra* 294 (2005), no. 2, 431–462.
- [P3] *Nicolas Perrin* : Small resolutions of minuscule Schubert varieties. Prépublication math.AG/0601117.
- [P4] *Nicolas Perrin* : Courbes elliptiques sur les grassmanniennes. Disponible sur la page [http ://www.math.jussieu.fr/~nperrin/](http://www.math.jussieu.fr/~nperrin/)
- [P5] *Nicolas Perrin* : Géométrie des variétés de Schubert, en préparation.
- [St] *John R. Stembridge* : Some combinatorial aspects of reduced words in finite Coxeter groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 349 (1997), no. 4, 1285–1332.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS 6
 UMR 7586 — INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU
 175 RUE DU CHEVALERET
 75013 PARIS, FRANCE.
 email : nperrin@math.jussieu.fr